Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

Fonctions de plusieurs variables et calcul intégral

Pour étudiants du parcours MIP

30 octobre 2013

Par: Dr. Mohammed HARFAOUI

Table des matières

Citations :Enseignement :

L'enseignement est un habit tout fait et pas un habit sur mesure.

On n'enseigne pas ce que l'on sait ou ce que l'on croit savoir : on n'enseigne et on ne peut enseigner que ce que l'on est.

Quand une société ne peut pas enseigner, c'est que cette société ne peut pas s'enseigner. [Charles Péguy]

La science, c'est ce que le père enseigne à son fils. La technologie, c'est ce que le fils enseigne à son papa. [Michel Serres]

Pour l'enseignant il ne s'agit pas d'aimer ou de détester, il s'agit avant tout de ne pas se tromper. [André Lévy]

Une société qui n'aime pas ses enseignants est une société qui n'a pas compris le défi de la mondialisation de demain.

[Valérie Pécresse]

Citations : mathématiques

Dieu a crée les nombres, le reste est l'oeuvre de l'homme.

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

Il y a des sciences bonnes dont l'existence est nécessaire et dont la culture est inutile. Telles sont les mathématiques. [Joseph Joubert]

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. [Isocrate]

La musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse. [Edouard Herriot]

Dieu n'est pas l'éternité, il n'est pas l'infini, mais il est éternel et infini. Il n'est ni la durée ni l'espace ; mais il a existé de tout temps et sa présence est partout. [Isaac Newton]

La vie n'est belle qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Introduction.

L'étude des fonctions de plusieurs variables commence au 18e siècle mais ses fondements solides ne sont posés qu'au début du 20e siècle. La notion de dérivée partielle est connue à la fin du 17e siècle, mais les premières équations aux dérivées partielles n'apparaissent qu'à partir de 1740 dans des problèmes de mécaniques.

Deux mathématiciens sont considérés comme les pères des dérivées partielles. Tout d'abord , le français CLAIRAUT Alexis-Claude (1713-1765) en 1747, puis le suisse EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) dans son traité Institutiones calculi differentialis de 1755. Ils étudient ce que l'on nomme maintenant, la différentielle totale pour des fonctions de deux variables réelles :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Au 18e siècle, les mathématiciens doivent apprendre à maitriser des équations d'ordre supérieur lorsqu'ils se consacrent aux problèmes de la Mécanique des corps déformables, de la théorie de l'élasticité et de l'hydrodynamique. Les dérivées partielles secondes apparaissent notament lors de la fameuse étude de l'équation aux cordes vibrantes qui, avec celle de la propagation de la chaleur, donna naissance à la théorie des séries de FOURIER (1768-1830). Le français D'ALEMBERT Jean Le Rond (Paris 1717 - Paris 1783) a le premier donné en 1747, une solution de ce problème qui se ramène à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (avec d'autres notations) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, y) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y).$$

Exemples :

La température, la pression comme fonction de la position sur une carte : fonction de deux variables x et y.

L'altitude en un point d'une carte : fonction de deux variables x et y.

La température, la pression en chaque point d'une pièce (en trois dimensions) : fonction de trois variables x, y et z.

Le volume d'une boîte en fonction de la hauteur, de la largeur et de la profondeur : fonction de trois variables H et L et l.

1.2 Généralité, et définitions

On veut généraliser pour ce type de fonctions les notions et résultats étudiés pour les fonctions réelles de la variable réelle vues, à savoir : régularité (continuité, dérivabilité...), existence d'extrema locaux ou globaux pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, intégrabilité... Pour cela, il sera nécessaire de préciser certains outils topologiques déjà plus ou moins abordés pour l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: norme, distances associée, ouvert, fermé, notion de limite...

1.2.1 Fonctions numériques.

Définition 1.2.1
On appelle fonction numérique de plusieurs variables toute application f d'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qu'on note :

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, ...x_n) \to y = f(x) = f(x_1, x_2, ...x_n).$$

Exemple 1.2.1.1

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x, y) = x^2 - y + 2$ *est une fonction de deux variables.*
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + z - 2}{x^2 + 1} + y^2 + z^2 - 1$ *est une fonction de trois variables.*
3. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x, y, z, t) \to f(x, y, z, t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 2}}{x^2 + y^2 + 2}$ *est une fonction de quatre variables.*

1.2.2 Domaine de définition .

Définition 1.2.2
Le domaine de définition d'une fonction numérique de plusieurs variables f est l'ensemble D_f défini par :

$$D_f = \{(x_1, x_2, ...x_n) \in \Omega : f(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.2.2.1

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \to \sqrt{1 - x^2 + y}.$
   $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 - x^2 + y \geq 0 \ \}$ *c'est donc la partie au-dessus de la parabole d'équation : $y = x^2 - 1$ (fig.1.1).*
2. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x, y, z) \to (\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2))\sqrt{z}.$
   $D_f = \{(x, y, z) \in \Omega, 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ *et* $z \geq 0 \ \}$ *c'est donc l'intérieur de la demi-sphère supérieure sans sa frontière (fig.1.2).* ■

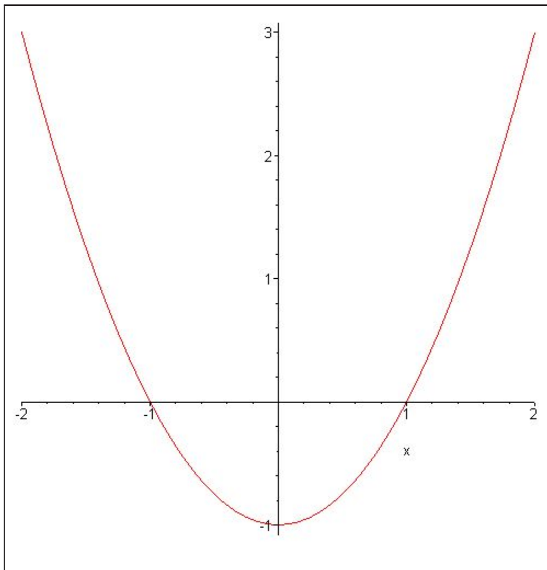


FIG. 1.1 – $f(x) = x^2 - 1$

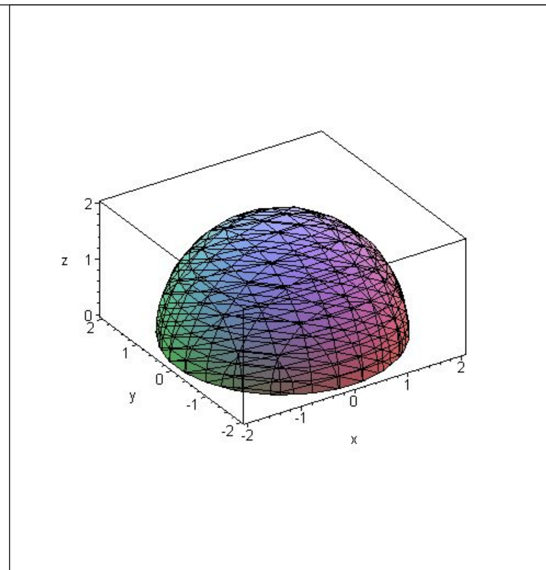


FIG. 1.2 – $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

■

1.2.3 Graphe d'une définition.

Rappel. Le graphe d'une fonction d'une seule variable :

$$\begin{cases} f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to y = f(x) \end{cases}$$

est une partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$\mathcal{C}_f = \{(x\, y) \in \mathbb{R}^2, x \in D_f : y = f(x)\}$.

Définition 1.2.3 *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, ...x_n) \to f((x_1, x_2, ...x_n)$ de domaine de définition D_f ; le graphe de f est la partie, notée G_f de $\mathbb{R}^{n+1}$, définie par :*

$$G_f = \{(x_1, x_2, ...x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}, ((x_1, x_2, ...x_n) \in D_f; z = f(x_1, x_2, ...x_n)\}.$$

Cas particuliers.

1. Dans le cas d'une fonction d'une seule variable le graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ et prend le nom de courbe.
2. Dans le cas d'une fonction de deux variable le graphe est une partie de $\mathbb{R}^3$ et prend le nom de surface.

Utilisation de Maple.

Pour les représentation on utilise Maple, vous avez ci-après quelques exemples :

1. Sphère.

$$> plots[implicitplot3d](subs(x^2 + y^2 + z^2 - 4), x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2);$$

2. Intersection d'un plan et une shère.

$$> plot3d([2 - x^2 - y^2, 3 - x - y], x = -Pi..Pi, y = -Pi..Pi, color = [blue, green]);$$

3. Intersection d'un cylindre et une shère.

$$C := x^2 + y^2 + z^2 - a^2, x^2 + y^2 - a * x :$$

$plots[implicitplot3d](subs(a = 5, x^2 + y^2 + z^2 - a^2, x^2 + y^2 - a * x), x = -5..5, y = -5..5, z = -5..7);$

4.

$$> plot3d(sqrt(4 - x^2 - y^2), x = -2..2, y = -2..2);$$

Exemple 1.2.3.1

1. *$f(x, y) = x + y - 3$. $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + y - 3\}$, c'est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, 1, -1)$.*

2. *$f(x, y) = x^2 - y^2$.(fig.1.3) $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x^2 - y^2$ $\}$.*

3. *$f(x, y) = x^2 + y^2$, avec $x^2 + y^2 \leq 1$. $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $z = x^2 + y^2$ et $x^2 + y^2 \leq 1\}$. G_f est donc un cône de rayon de la base $R = 1$(fig.1.4).*

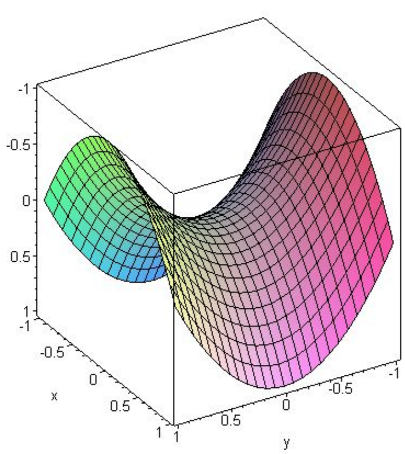


FIG. 1.3 – $f(x, y) = x^2 - y^2$

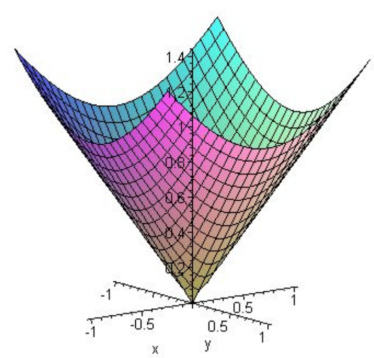


FIG. 1.4 – $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. *$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, G est la demi-sphère supérieure avec sa frontière, (fig.1.5).*

5. *$f(x, y) = x^2 + y^2, G_f$ est une paraboloide, (fig.1.6).*

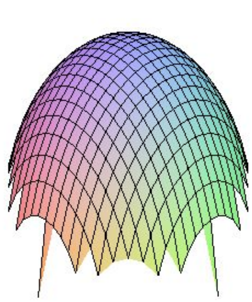


FIG. 1.5 – $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

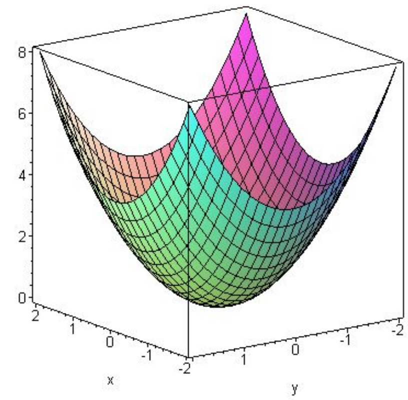


FIG. 1.6 – $f(x,y) = x^2 + y^2$

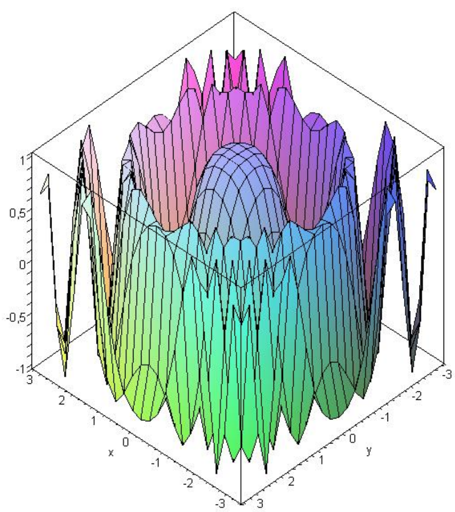


FIG. 1.7 – $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$

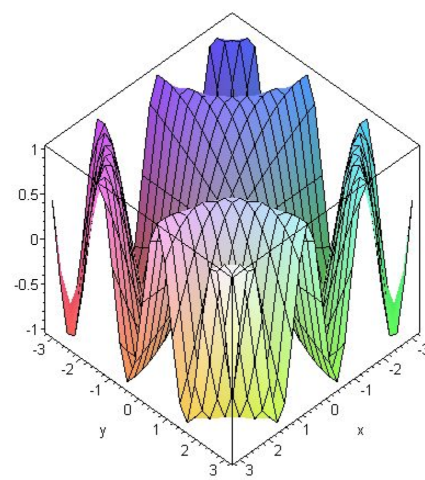


FIG. 1.8 – $f(x,y) = sin(xy)$

1.2.4 Fonctions partielles.

Définition 1.2.4
Soit, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, ...x_n) \to y = f(x) = f(x_1, x_2, ...x_n)$*, une fonction de* n *variables. On appelle fonction partielle d'ordre* i *(ou* i^{eme} *fonction partielle) la fonction d'une seule variable en variant la* i^{eme} *coordonnée et en fixant les autres. Elle est définie par :*
$f_i :]a, b[\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x_i \to f_i(x_i) = f(x_1, ..., x_i, ...x_n)$.

Exemple 1.2.4.1 *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ *par :*

$$f : \mathbb{R}^2 - (0,0) \to \mathbb{R} : (x,y) \to f(x,y) = \frac{1 - cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}.$$

La première et la deuxième fonction partielles de f *sont :*

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : x \to f_1(x) = \dfrac{1 - cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$*,* y *fixé.*
2. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : y \to f_2(y) = \dfrac{1 - cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$*,* x *fixé.*

1.3 Notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Vecteurs et normes euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

La distance usuelle entre deux points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ vue dans les petites classes est ce qu'on appelle la distance euclidienne. On définit également ainsi la longueur d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, encore appelée la norme euclidienne de ce vecteur et notee $\| \overrightarrow{u} \|$: si $\overrightarrow{u}$ a pour composantes (u_1 et u_2) dans un repere orthonorme $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors le Théorème de Pythagore donne (figure 1.7) : $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Rappelons qu'en dimension 2, on identifie un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (u_1 et u_2) avec un point M du plan de coordonnées (u_1, u_2) une fois fixée une origine O et écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

On généralisera ici cette identification en désignant le point ou le vecteur de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ par $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$est définie par :

$$\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Le produit scalaire de $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $y = (y_1, ..., y_n)$ est défini par

$$x.y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

On a en particulier $\| x \|_2 = x \Delta x$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$

$$| x.y | \leq \| x \| . \| y \|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels.
Inégalité triangulaire : pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$

$$| x + y | \leq \| x \| + \| y \| .$$

1.3.2 Norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.1
On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application
$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longrightarrow \mathcal{N}(x)$, *vérifiant, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et tout scalaire λ de $\mathbb{R}$:*

1. $\mathcal{N}(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
2. $N(\lambda x) =\mid \lambda \mid \mathcal{N}(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $N(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$, *pour tout* x, y *de* $\mathbb{R}^n$.

1.3.3 Distance sur l'espace vectoriel.

Définition 1.3.2
Soit E un espace vectoriel. On appelle ***distance*** *sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient les trois axiomes :*

1. $\forall (x, y) \in E \times E, \;\; d(x, y) = d(y, x)$.*(symétrie)*
2. $\forall (x, y) \in E \times E, \;\; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*(séparation)*
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, \;\; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*(inégalité trianqulaire)*

L'ensemble E muni de cette distance est dit : ***espace métrique*** *et on note (E, d)*

Proposition 1.3.1 *(distance sur $\mathbb{R}^n$)*

Soit une norme $\mathcal{N}$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Une distance d sur $\mathbb{R}^n$ par la formule suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \mathcal{N}(x - y).$$

D'un point de vue géométrique, la norme euclidienne $\parallel x \parallel$ correspond à la longueur du vecteur x (ou encore à la distance du point x à l'origine).

C'est à dire la longeur du vecteur reliant le point x au point y. La norme euclidienne n'est pas l'unique façon de mesurer la taille d'un vecteur x.

1.3.4 Boule et sphère associées à une norme.

Définition 1.3.3

1. *La boule ouverte de centre a de $\mathbb{R}^n$ et de rayon r est :*

$$B(a,r) = \{x \in E / \mathcal{N}(x-a) < r\}$$

.

2. *La boule fermée de centre a de $\mathbb{R}^n$ et de rayon r est :*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E / \mathcal{N}(x-a) \leq r\}$$

.

3. *La sphère de centre a de $\mathbb{R}^n$ et de rayon r est :*

$$B(a,r) = \{x \in E / \mathcal{N}(x-a) = r\}$$

.

4. *Les boules ou les sphères de centre O de $\mathbb{R}^n$ et de rayon $r = 1$ sont appelées boules unitées ou sphères unitées.*

Représentation des trois normes dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.3.4
Deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont dites équivalentes s'il existe α, β et γ de $\mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha\mathcal{N} \leq \beta\mathcal{N}' \leq \gamma\mathcal{N}$$

Exemple 1.3.4.1 *Dans $\mathbb{R}$ la fonction valeur absolue est une norme.*

1.3.5 Normes classiques dans $\mathbb{R}^n$

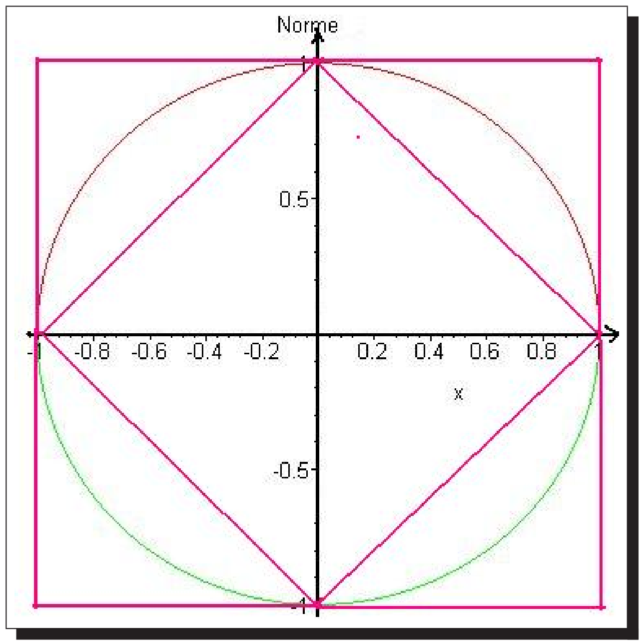
On définit trois normes sur $\mathbb{R}^n$ par :
Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

1. $\mathcal{N}_1(x)\mathcal{N}_1(x_1, ..., x_n) = \| (x_1, ..., x_n) \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$

2. $\mathcal{N}_2(x) = \mathcal{N}_2(x_1, ..., x_n) = \| (x_1, ..., x_n) \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
3. $\mathcal{N}_\infty(x) = \mathcal{N}_\infty(x_1, ..., x_n) = \sup_{1 \leq i \leq n} (| x_i |)$.

On vérifie facilement que ces trois normes vérifient les trois propriétés d'une normes.

Exemple 1.3.5.1 *Représentation des trois normes dans* $\mathbb{R}^2$



Proposition 1.3.2

1. *Les trois normes $\mathcal{N}_1(x)$, $\mathcal{N}_2(x)$ et $\mathcal{N}_\infty(x)$ sont équivalentes.*
2. *Toutes les normes de $\mathbb{R}$ sont équivalentes.*

Définition 1.3.5
Un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ***ouvert****t si et seulement si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que :*

$$B(x, r) \subset U.$$

Par convention ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.
L'ensemble des points intérieur a E est appelé intérieur de E et est note $\overset{\circ}{E}$.
On vérifie que $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E et que E est ouvert si et seulement si il est égal à son intérieur.

Définition 1.3.6
Un ensemble F de $\mathbb{R}$ est dit ***fermé*** *si et seulement si son complémentaire $F^c = \mathbb{R}^n \backslash F$ est ouvert.*

Définition 1.3.7
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné si et seulement si il existe $R > 0$ tel que $E \subset B(0, R)$. Un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est dit ***compact****.*

Définition 1.3.8
*Dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble E est dit **compact** si et seulement si il est fermé borné.*

1.3.6 Quelques propriètes élementaires.

1. Toute union finie ou infinie d'ouverts est un ouvert.
2. Toute union finie de fermés est un fermé.
3. Toute intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.
4. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
5. Les seuls ensembles a la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.
6. Un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.
7. $\overset{\circ}{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Remarque 1.3.1
Soit K un corps muni d'une valeur absolue, et non discret (par exemple le corps des réels ou des complexes. Tous les résultats présidents se généralisent sur Un K-espace vectoriel E dit normé E muni d'une norme définie par la même définition.1.3.1.

Définition 1.3.9
*Un ensemble E est dit **connexe** si et seulement si il existe aucune paire d'ouverts (U_1, U_2) tels que $E \subset U_1 \cup U_2$ et $E \cap U_2$ et $E \cap U_2$ sont disjoints.*

Autrement dit, E est connexe si on ne peut pas le séparer en deux partie disjointes en l'intersectant avec deux ouverts. Dans le cas d'un ensemble ouvert, cela se traduit par la propriété intuitive suivante.

Proposition 1.3.3
Un ensemble ouvert U est connexe si et seulement si pour tout x et y dans U, il existe une ligne brisée contenue dans U qui les relie.

Définition 1.3.10
*Un ensemble E est dit **convexe** si et seulement si pour tout x, y de E et $t \in [0,1]$ on a $tx + (1.t)y \in E$, i.e. le segment d'extrémité x et y est contenu dans E.*

Remarque 1.3.2 *On peut vérifier qu'en dimension $n = 1$ les connexes et les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (de taille finie ou infinie).*

En revanche, en dimension $n > 1$ tout convexe est connexe mais la réciproque est fausse. On vérifie aussi qu'une intersection finie ou infinie de compacts est un compact et de même pour les convexes.

Définition 1.3.11

1. *Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. On dit que Ω est étoilé par rapport à a si $[a, x] \subset \Omega, \forall x \in \Omega$.*
2. *Ω est étoilé si Ω étoilé par rapport à tous ses points.*

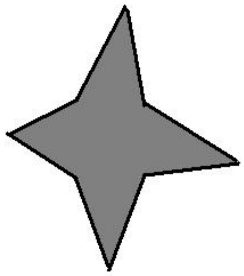


FIG. 1.9 – étoilé par rapport au sommet et non étoilé

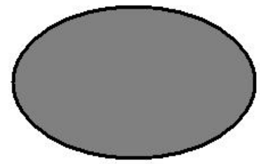


FIG. 1.10 – étoilé par rapport à tous ses points

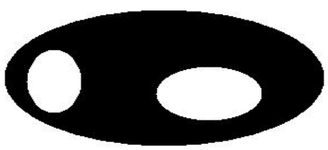


FIG. 1.11 – connexe par arc non étoilé

FIG. 1.12 – Poincaré Henri

1.4 Limite et continuité des fonctions numériques de plusieurs variables.

On sait que la limite et la continuité en un point x_0 d'une fonction numérique d'une seule variable sont données par les définitions :
$(\forall\varepsilon > 0)$, $(\exists\eta > 0)$ tels que :$\mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon$.
$(\forall\varepsilon > 0)$, $(\exists\eta > 0)$ tels que :$\mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$.
Ces définitions sont données par les valeurs absolues. Dans le cas des fonctions de plusieurs la notion de valeur absolue n'est plus valable et elle sera remplacée une notion jouant le même rôle. On utilise alors la notion de : norme.

1.4.1 Limite et continuité d'une fonction en un point.

Soit $(p_k)_k > 0$ une suite de points (ou de vecteurs) de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette suite converge vers une limite $p \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \mathcal{N}(p_k - p) < \epsilon.$$

Théorème 1.4.1
F est ferme si et seulement toute suite de point de F qui converge a sa limite contenue dans F.

Définition 1.4.1
Soit f une fonction numérique de plusieurs variables définie dans un voisinage d'un point $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ sauf peut être au point x_0.
On dit que f admet une limite L en x_0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0) \text{ tels que } :\| x - x_0 \| < \eta \Rightarrow | f(x) - L | < 0, \text{ pour } x = (x_1, ..., x_n).$$

ou $\| \, . \, \|$ est l'une des trois normes équivalentes.
et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Exemple 1.4.1.1 *Montrer que les fonctions suivantes admettent les limites 0 aux points données :*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *où* $(x_0, y_0) = (0,0)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2 sin(xy)}{x^2+y^2}$, *où* $(x_0, y_0) = (0,0)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, *où* $(x_0, y_0) = (0,0)$. *(passer aux coordonnées polaires puis aux directions* $x = y$ *et* $y = x^2$*).*

Théorème 1.4.2
Si f admet une limite en un point a sur un voisinage V_a de a alors sa restriction sur tout sous ensemble V_a' de V_a admet la même limite en a. On a :

$$\lim_{x \in V_a \to x_0} f(x) = \lim_{x \in V_a' \to x_0} f(x)$$

Corollaire 1.4.1.1
Si une fonction f admet une limite sur un ouvert alors f admet la même limite par rapport à chacune de ses variables.

Remarque 1.4.1
La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie.

En effet soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si };(x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0, & \text{si }:(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Cette fonction admet la même limite par rapport à chacune des variable au point $(0,0)$.

Car : $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0$,

mais $\lim\limits_{(x,kx) \to (0,0)} f(x,kx) = \lim\limits_{(x,kx) \to (0,0)} \dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$. Cette dernière limite dépend de k et donc f n'a pas de limite.

Proposition 1.4.1
Soient f et g deux fonctions admettant en x_0 les limites L et L'. Alors :

1. *Soient $f+g$ admet en x_0 la limite $L+L'$.*
2. *Soient αf admet en x_0 la limite αL*
3. $\dfrac{f}{g}$ *admet en x_0 la limite* $\dfrac{L}{L'}$, *si* $L' \neq 0$.

1.4.1.1 Continuité d'une fonction en un point.

Soit f une fonction numérique de plusieurs variables définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.2
On dit que f est continue en un point x_0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0) \text{ tels que } :\| x - x_0 \| \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < 0, \text{ pour } x = (x_1, ..., x_n)$$

ou $\| \,.\, \|$ est l'une des trois normes équivalentes.
et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Théorème 1.4.3
f est continue en un point x_0 si et seulement si f admet une limite en x_0 et cette limite est $f(x_0)$.

Remarque 1.4.2
Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle on sait que tout fonction continue à droite et à gauche en un point est continue. Cette propriété tombe en défaut dans le cas des fonction de plusieurs variables.
En effet, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & si\,;(x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0, & si\,:(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue suivant toute direction passant passant par $(0,0)$ mais pas continue en $(0,0)$ (poser $x = y^2$).

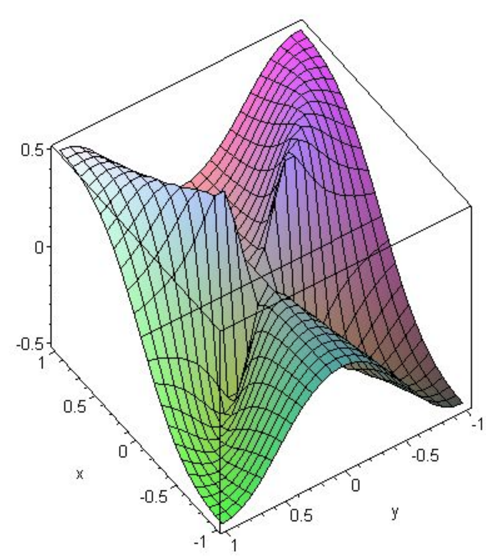


FIG. 1.13 – $f(x,y) = xy^2/x^2 + y^4$

Autre exemple.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{si} y=0 \\ 1, & \text{si}(x-1)^2+y^2=1 \\ 1, & \text{si} x^2+(y-1)^2=1 \\ 0, ailleurs & \end{cases}$$

Sur toute demi-droite aboutissant à $(0,0)$, cette fonction a 1 pour limite ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1=f(0,0)$), mais elle n'est pas continue en $(0,0)$.

1.4.1.2 Opération sur la continuité des fonctions de plusieurs variables.

Proposition 1.4.2 *Si f et g sont continues en x_0 et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors :*

1. *$f+g$, $f.g$ et $\alpha\ f$ sont continues en x_0.*
2. *si $g(x_0)\neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.*

1.4.2 Continuité d'une fonction sur un ouvert.

Soit f une fonction numérique de plusieurs variables définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}_n$.

> **Définition 1.4.3**
> *On dit que f est continue sur un ouvert Ω si f est continue en tout point de Ω.*

Théorème 1.4.4

1. *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.*

Exemple 1.4.2.1 *Étudier la continuité de des fonctions f et g définies par :*

1. $$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2}, & si\,;(x,y)\neq(0,0) \\ f(x,y)=\dfrac{1}{2}, & si\,:(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   (utiliser la norme $\|(x,y)\|_2$)

2. $$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}, & si\,;(x,y)\neq(0,0) \\ f(x,y)=0, & si\,:(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   (utiliser la norme $\|(x,y)\|_1$)

Théorème 1.4.5

Si f est continue alors f est continue par rapport à chacune de ses variables séparément.

1.4.2.1 Continuité de la composée de deux fonctions.

Théorème 1.4.6

Soit f une fonction définie continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ et g fonction définie continue sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

Si f continue en un point x_0 de Ω et g est continue en $f(x_0)$ alors la fonction gof est continue en x_0.

Exemple 1.4.2.2

Donner le domaine de définition et étudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = ln(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2})$$

1.5 Dérivées partielles et différentielle totale.

1.5.1 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

1.5.1.1 Motivation.

Les fonctions de plusieurs trouvent leus applictions en économie surtout. Pour une fonction de production de la forme $P = f(K,L) = aK^\alpha L^\beta$ (celébre fonction de cob-Douglass), on peut se demander de combien augmentera la production si l'un des facteurs augmente en gardant le second constant ?

Il s'agit de calculer la dérivée par rapport au acteur qui varie et comme la fonction dépend de deux variables on parlera de dérivées partielles.

Pour une entreprise si on cherche à minimiser le coût, il s'agit là encore d'étudier les dérivées premières et secondes partielles.

1.5.1.2 dérivée partielle première ou d'ordre un.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, et (x_0, y_0) un élément de Ω.

Définition 1.5.1

On appelle dérivée partielle première ou d'ordre un de f par rapport à x au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction : $x \longrightarrow f(x, y_0)$ au point x_0. Donc*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

On appelle dérivée partielle première ou d'ordre un de f par rapport à y au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction : $y \longrightarrow f(x_0, y)$ au point y_0. Donc*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

1.5.1.3 dérivée partielle seconde ou d'ordre deux.

Définition 1.5.2
On appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre deux de f par rapport à x au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = f''_x(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction :*
$x \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ *au point* x_0.
On appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre deux de f par rapport à y au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0)=f''_y(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction :*
$y \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ *au point* x_0.
On appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre deux de f par rapport à x, y au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction :*
$x \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ *au point* x_0.
On appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre deux de f par rapport à y, x au point (x_0, y_0), notée :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, *la dérivée de la fonction :*
$y \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$ *au point* y_0.

Avec Maple
Pour calculer les partièlles on déclare la fonction par (par exemple) :

$$> f := (x, y, z)- > x^2 - 3 * x * y * z + z^4;$$

On aura $f := (x, y, z) \rightarrow x^2 - 3xyz + z^4$.
Les fonctions dérivées premières par rapport à x,y, et z respectivement
$> D[1](f); D[2](f); D[3](f);$

$(x, y, z) \rightarrow 2x - 3yz$
$(x, y, z) \rightarrow -3xz+$
$(x, y, z) \rightarrow -3xy + 4z^3$

Les fonctions dérivées secondes par rapport à x,y, et z respectivement
$D[i, j](f) \Leftrightarrow D[i](D[j](f));$
Par exemple par rapport à x, y on a :
$> D[1, 2](f);$ et le résultat est : $(x, y, z) \rightarrow -3z$

Exemple 1.5.1.1 *Calculer les dérivées partielles d'ordre un et d'ordre deux des fonctions :*

1. $f(x, y) = z = \dfrac{xy}{x - y}$
2. $f(x, y) = z = \dfrac{ln(x - y + 1)}{x + y}$

Vous etes invités à le faire à la main.

Réponse par Maple

1. On déclare la fonction :
   $f := (x, y) - > (x * y)/(x + y)$; $f := (x, y) \rightarrow \dfrac{xy}{(x+y)}$.

$$(x, y) \rightarrow \frac{y}{(x+y)} - \frac{xy}{(x+y)^2}$$

$$(x, y) \rightarrow \frac{}{(x+y)} - \frac{xy}{(x+y)^2}$$

2. On déclare la fonction :

$$> f := (x, y) - > \frac{ln(x-y+1)}{(x+y)};$$

$f := (x, y) \rightarrow ln(x - y + 1)/(x + y)$

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{(x-y+1)(x+y)} - \frac{ln(x-y+1)}{(x+y)}$$

$$(x, y, z) \rightarrow -\frac{1}{(x-y+1)(x+y)} - \frac{ln(x-y+1)}{(x+y)}$$

Définition 1.5.3
On dit que f est de classe C^k sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si les dérivées partielles d'ordre k de f sont continues sur Ω.

1.5.1.4 Dérivée suivant un vecteur.

Soient a un point de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Puisque contient une boule ouverte centrée en a, la fonction :

$$t \rightarrow f(a + t.\overrightarrow{u})$$

est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.5.4
On appelle dérivée de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$, et on note $df_{\overrightarrow{u}}(a)$, la dérivée (si elle existe) de la fonction $t \rightarrow f(a + t.\overrightarrow{u})$ en 0, i.e.

$$df_{\overrightarrow{u}}(a) = \lim_{t\rightarrow} \frac{f(a + t.\overrightarrow{u}) - f(a)}{t}$$

Notons que $df_{\overrightarrow{u}}(0)$ existe toujours et vaut 0.

1.5.2 Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables

1.5.2.1 Rappel.

Soit f une fonction numérique d'une seule variable définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $h = x - x_0 = \Delta x$.

On sait que sa dérivée en x_0 est donnée par :

$f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$, donc $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

On généralise cette définition dans $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

Définition 1.5.5
Soit f une fonction numérique de plusieurs variables définie sur un ouvert un voisinage contenant $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.
On appelle différentielle totale de f en x_0, qu'on note df_{x_0}, l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$(df)_{x_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)dx_i$.

Cas particuliers :

1. Dans $\mathbb{R}^2$: $(df)_(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $(df)_(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz$.

1.5.2.2 Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.5.6
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en $(x_0, y_0) \in \Omega$ s'il existe des constantes réelles a et b telles que :
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \epsilon(h, k)$ *et* $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\epsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$.

Remarque 1.5.1
On peut montrer que : $h = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *et* $k = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Remarque 1.5.2
Pour montrer qu'une fonction est différentiable en un point (x_0, y_0), on calcule les dérivées partielles en ce point et la limite :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah + bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = L.$$

Si cette limite est nulle la fonction est différentiable en ce point et de différentiable :

$$(df)_(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

1.5.2.3 Propriétés.

Proposition 1.5.1

Soit $f : \Omega \subset^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur l'ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*. Alors pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *et tout* $a \in \Omega$: $d(f+g)_a = df_a + dg_a$

Remarque 1.5.3

La différentielle totale de $z = f(x, y)$ *est l'accroissement de* z *lorsque* dx *et* dy *tendent vers 0.* $dz \simeq \Delta z$.

On peut déterminer ***l'erreur*** $\varepsilon(z)$ *de* z *si on connaît les variations* dx *et* dy*.*

En effet :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

$$| dz | \leq | \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) | . | dx | + | \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) | . | dy |.$$

ou

$$| \varepsilon(z) | \leq | \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) | . | \varepsilon(x) | + | \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) | . | \varepsilon(y) |.$$

Exemple 1.5.2.1 *Soit* $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 2$.

1. *Calculer* $df(1, 2)$.
2. *En déduire l'erreur* $\varepsilon(z)$ *lorsque* ($x = 1 + 0.02$ *ou* $x = 1 + 0.02$) *et* ($y = 2 + 0.01$ *ou* $y = 1 - 0.01$).

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - y - 3, \\ f'_x(x, y) = -x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(1, 2) = -3, \\ f'_x(1, 2) = 7 \end{cases}$$

$df(x, y) = (2x - y - 3)dx + (-x + 4y)dy$ *donc* $df(1, 2) = -3dx + 7dy$ *d'où :*

$| \varepsilon(z) | \leq 3 \, | \varepsilon(x) | + 7 \, | \varepsilon(y) | \leq 0.27$

Proposition 1.5.2

Si f *est différentiable en un un point* a *alors* f *est continue en* a

Proposition 1.5.3

Si f *est différentiable en un point* a *alors* f *admet une dérive suivant tout vecteur non nul* $\overrightarrow{u}$ *de* $\mathbb{R}^{\ltimes}$

Proposition 1.5.4

Pour que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *soit différentiable en un point* a*, il suffit que* f *admette sur* V*, un voisinage de* a*,* n *dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$*, toutes continues en* a*. alors* f *admet une dérive suivant tout vecteur non nul* $\overrightarrow{u}$ *de* $\mathbb{R}^{\ltimes}$

Démonstration.

V est un ouvert donc il existe $\eta > 0$, $P \subset V$, où $P = \{x; \forall j = 1, ..., n, |x_j - a_j| < \eta\}$.

Pour $h \in \Omega$, tel que $\forall j = 1, ..., n, |h| < \eta$, soit $V_j = \sum_{i=1}^{j} h_i e_i$, $1 \leq j \leq n$ et $V_0 = 0$

On a alors : $f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f(a+V_j) - f(a+V_{j-1})$

donc : $f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(h_j) - \varphi_j(0)$

avec : $\varphi_j : t \to f(a + V_{j-1} t e_j) - t \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à φ_j sur $[0, h_j]$ donne :

$|\varphi_j(h_j) - \varphi_j(0)| \leq |h_j| c$ avec $\varphi_j = \sup\limits_{t \in [0, h_j]} |f(a + V_{j-1} t e_j) - t \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)|$

donc avec, par exemple, $\|h\| = \sup\limits_{1 \leq j \leq n}$:

$|f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}| \leq \|h\| \sum_{j=1}^{n} M_j$

La continuité des dérivées partielles en a donne : $\lim\limits_{h \to 0 = 1} M_j$

D'où $f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = o(h)$

Proposition 1.5.5

Pour que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, il suffit et il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Conséquence.

Si f est différentiable en un point a alors f addmet une dérive parielle par rapport à chacune de ses variables.

Remarque 1.5.4

La réciproque de la proposition n'est pas toujours vraie.

Exemple 1.5.2.2

Etude de la continuité et la diffrentiabilité $(0,0)$ de la fonction :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y^2 x}{x^2+y^2}, & si \,;(x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0, & si \,:(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il est évident que la fonction est continue en $(0,0)$.

On a pour tout t, $f(t(1,1)) = \dfrac{t^3}{2.t^2}$, et

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t(1,1)) - f(0,0)}{t} = \dfrac{1}{2}$. Donc f est diffrentiable suivant le vecteur $(1,1)$ et on a : $d_{(1,1)} f(0,0) = \dfrac{1}{2}$.

Et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t(2,1)) - f(0,0)}{t} = \dfrac{2}{5} \neq \dfrac{1}{2}$. Donc f n'est pas diffrentiable en $(0,0)$.

Attention : Une fonction peut admettre des dérivées partielles en tout point d'un ouvret sans qu'elle soit continue en un point de cet ouvert. Etudier la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

1.5.3 Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 1.5.1

Soit f une fonction définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues sur D. On suppose que x et y sont des fonctions d'une seule variable définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$x = \varphi(t)$ *et* $y = \psi(t)$.

Alors la fonction F définie sur I par :

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

est dérivable sur I et on a :

$$F^{'}(t) = f_x^{'}(\varphi(t), \psi(t))\varphi^{'}(t) + f_y^{'}(\varphi(t), \psi(t))\psi^{'}(t)$$

1.5.4 Dérivées partielles d'une fonction composée

Théorème 1.5.2

Soit $f : (u, v) \longrightarrow f(u, v)$ une fonction définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues sur D. On suppose que u et v sont des fonctions de deux variables définies sur une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues sur U : $u = \varphi(x, y)$ et $v = \psi(x, y)$.

Alors la fonction F définie sur U par :

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

admet des dérivées partielles sur U définies par :

$$\begin{cases} F_x^{'}(x, y) = f_u^{'}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\varphi_x^{'}(x, y) + f_v^{'}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\psi_x^{'}(x, y), \\ F_y^{'}(x, y) = f_u^{'}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\varphi_y^{'}(x, y) + f_v^{'}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\psi_y^{'}(x, y) \end{cases}$$

Exemple 1.5.4.1 *Transformer l'équation suivante :*

$$(x + y)f_x^{'}(x, y) + (x - y)f_y^{'}(x, y) = 0$$

à l'aide des nouvelles variables :

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2xy, \\ v = y \end{cases}$$

Exercice d'application

Soit l'équation aux dérivés partielles :

(E) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et g la fonction définie par :

$g(r, \theta) = (x, y) = (r \cos\theta,\ r \sin\theta)$.

1. Donner l'équation aux dérivées partielles $(E^{'})$ vérifiée par : $\varphi(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
2. Résoudre $(E^{'})$ puis (E).

Corrigé

1. On a pour tout $(r,\theta) \in]r,+\infty[\times]0,2\pi[$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ donnent :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right. \qquad (S)$$

$$\left\{\begin{array}{l} r\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = r\cos^2\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = r\sin^2\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = r\sin\theta\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\sin^2\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos^2\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right.$$

et pour tout (x,y) on a On résout le système (S) d'inconnues $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ on aura pour tout (x,y) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) \end{array}\right.$$

et $\left\{\begin{array}{l} x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\cos^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) - \cos\theta\sin\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) \\ y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) + r\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) \end{array}\right.$

2. On remplace dans l'équation (E) on aura :
(E') $\quad r\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = r$ ou (E') : $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = 1$. On a donc $\varphi(r,\theta) = r + c(\theta)$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + c(\arctan\frac{y}{x})$.

Théorème 1.5.3 *(Théorème de Schwartz)*

Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *sont continues en* (x_0,y_0) *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$

Démonstration.

Soit la fonction : $\omega = f(a+h_1,b+h_2) - f(a+h_1,b) - f(a,b+h_2) + f(a,b))$

On peut traiter ω comme accroissement de la fonction $\varphi(x) = f(x,b+h_2) - f(a,b)$ et la fonction $\psi(y) = f(a+h_1,y) - f(a,y)$, lorsque x varie de a à $a+h_1$ respectivement lorsque x varie de b à $b+h_2$.

Pour la première fonction φ on a :

$\omega = \varphi(a+h_1) - \varphi(a) = \varphi'(a+\theta_1.h_1)h_1$

$\quad = [\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1.h_1,b+h_2)]h_1$

pour $0 < \theta_1 < 1$. On applique le théorème des accroissements finis à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la deuxième variable on aura :

$\omega = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_1.h_1, b + \theta_2.h_2)h_2 h_1$

avec $0 < \theta_2 < 1$.

La même quantité ω donne :

$\omega = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \tau_1.h_1, b + \tau.h_2)h_1 h_2$

pour $0 < \tau_1 < 1$ et $0 < \tau_2 < 1$.

Lorsqu'on tend h_1 et h_2 vers 0 et on applique la continuité des dérivées partielles secondes on aura le résultat.

Corollaire 1.5.4.1

Soit f une fonction définie sur un ouvert$U$ de $\mathbb{R}^2$.

Si les fonctions dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont continues sur U.

Alors pour tout $(a, b) \in U$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$.

Exemple 1.5.4.2 *Soit la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$*,et* $(x, y) \neq (0, 0)$ $f(0, 0) = 0$

Un calcul élémentaire donne :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$.

Par ailleurs, f admet des dérivées secondes en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, donc l'une des deux fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

1.6 Fonctions homogènes et théorène des fonctions implicites

1.6.1 Fonctions homogènes

Définition 1.6.1
Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ est dite homogène d'ordre α si :
Pour tout $t > 0$;

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Exemple 1.6.1.1

1. *La fonction définie par :*

$$z = f(x, y) = 3x^2 y - xy^2$$

   est homogène d'ordre 3.

2. *La fonction définie par :*

$$z = f(x, y) = ln(\frac{x}{x + y})$$

   est homogène d'ordre 0.

3. *La fonction définie par :*

$$z = f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

est homogène d'ordre -1.

Proposition 1.6.1

Si f est une fonction homogène d'ordre α et admet des dérivées partielles. Alors les fonctions dérivées partielles sont homogènes d'ordre $\alpha - 1$.

Théorème 1.6.1 ***(Théorème d'Euler)***

Soit f une fonction admettant des dérivées partielles continues sur un domaine D. Alors :
la fonction f est homogène d'ordre α si et seulement si

$$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = \alpha f(x,y).$$

Démonstration

On a $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$, on dérive le premier et le deuxième membre de l'égalité par rapport a t on aura :

$xf'(tx,ty) + yf'(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$

et on remplace t par 1.

Exemple 1.6.1.2

La fonction définie par :

$$z = f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$$

est homogène d'ordre 1 et on montre facilement que :

$$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = f(x,y)$$

1.6.2 Théorèmes de fonctions implicites

1.6.2.1 Théorème des fonctions implicites définies par une équation

En route vers la définition

Soit l'équation $f(x, y) = 0$, peut-on trouver y en fonction de x, c-à-d existe-t-il une fonction φ telle que $y = \varphi(x)$?

Exemple 1.6.2.1

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ *et soit l'équation :*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

Alors $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *est équivalente à*
$y = \sqrt{-x^2 + 1}$ *ou* $y = -\sqrt{-x^2 + 1}$.
Soit (x_0, y_0) *tel que :* $f(x_0, y_0) = 0$.
La solution de l'équation (1) au voisinage de (x_0, y_0) *est définie par :*

1. *Si* $y_0 > 0$, *on prend* $y = \varphi(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$
2. *Si* $y_0 < 0$, *on prend* $y = \varphi(x) = -\sqrt{-x^2 + 1}$

Théorème 1.6.2 ***(Théorème des fonctions implicites définies par une équation.)***
Soit f *une fonction de deux variables declasse* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^{\nvDash}$ *et un point* $(x_0, y_0) \in U$ *telle que* $f(x_0, y_0) = 0$.
Si f'_x *et* f'_y *existent et sont continues sur* V *et si* $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, *alors Il existe :*
– *un voisinage* I_{x_0} *de* x_0.
– *un voisinage* J_{x_0} *de* y_0.
– *une fonction* φ *d'une seule variable de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* I_{x_0} *dans* J_{y_0}
tels que pour tout $(x, y) \in I_{x_0} \times J_{y_0}$ *:*

$$f'_y(x, y) \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \phi(x)$$

De plus pour tout $x \in I_{x_0}$ *:* $\varphi'(x) = -\dfrac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_{xy}(x, \varphi(x))}$

> **Définition 1.6.2**
> *La fonction* φ *ainsi définie est appelée fonction implicite définie parune équation.*

Exemple 1.6.2.2 *Montrer qu'il existeune fonction* φ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *au voisinagede* 0 *telle que* $\varphi(0) = 0$, *définie implicitement par* $\arctan(xy) + 1 = \exp(x + y)$.
Donner le DL_3 *de* f *au voisinage de* 0.*(On trouve* $\varphi(x) = -x - x^2 - x^3 + o(x^3)$*)*

1.6.2.2 Théorèmes de fonctions implicites définies par un système d'équations

Théorème 1.6.3

(Théorème des fonctions implicites définies par un système d'équations.)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}'$ dans $\mathbb{R}'$ et soit un point $a = (a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+p})$ telle que $f(a) = 0$ et

$$det\Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\Big]_{1\leq i\leq p\, 1\leq j\leq p} \neq 0$$

Alors Il existe :

- *un voisinage U_1 de $(a_1, a_2, ..., a_n)$.*
- *un voisinage U_2 de $(a_{n+1}, ..., a_{n+p})$.*
- *une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ de U_1 dans U_2*

tels que pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}) \in U_1 \times U_2$:

$$det\Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(x)\Big]_{1\leq i\leq p\ \ 1\leq j\leq p} \neq 0$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}) = 0 \Longleftrightarrow (x_{n+1}, ..., x_{n+p}) = \phi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

où $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$.

Exemple 1.6.2.3 *Montrer que, au voisinage de $(1, 1, 1)$, l'ensemble Γ :*

$$\Gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^3 + 2xz - y = 2\big\}$$

admet une représentation paramétrique dela forme : $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \\ x \in I \end{cases}$ *(Considérer la fonction $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 3, x^3 + 2xz - y - 2)$)*

Calculer les dérivées premières et secondes de φet ψ en 1.(On trouve $\varphi'(1) = 1$, $\varphi''(1) = -\dfrac{14}{3}$, $\psi'(1) = -2$, $\psi''(1) = -\dfrac{4}{3}$.)

1. *Montrer qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinagede 0 telle que $\varphi(0) = 0$, définie implicitement par $\arctan(xy) + 1 = \exp(x + y)$.*
2. *Donner le DL_3 de f au voisinage de 0.*
   (On trouve $\varphi(x) = -x - x^2 - x^3 + o(x^3)$)

Exercice 1.6.1

Soit $f : R^3 \to R^2$ définie par $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 - y^2 + z2 - 1, xyz - 1)$ telle que $f(1, 1, 1) = (0, 0)$.

Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Corrigé 1.6.1

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car ces composantes sont des fonctions polynômes.

Le jacobien

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1) \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe I *intervalle contenant* 1 *et* $g : I \to \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,\varphi(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$ *et* $\varphi(1) = (1,1)$.

1.7 Formules de Taylor et développement limité

Toutes les fonctions considérées dans cette partie sont des fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.7.1 Formule de Taylor d'une fonction de plusieurs variabes

1.7.1.1 Formule des accroissements finis

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ $(a,b) \in \Omega$, et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment [(a,b),(a+h,b+k)].

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = f(a+th, b+tk)$$

Alors :

$$g^{'}(t) = hf_x^{'}(a+th, b+tk)) + kf_y^{'}(a+th, b+tk)$$

D'après la formule des accroissements finis dans $\mathbb{R}$ appliquée à g sur l'intervalle [0,1], on a :

Il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$g(1) - g(0) = g^{'}(\theta)$$

D'où la D'après la formule des accroissements finis dans $\mathbb{R}^2$:

Théorème 1.7.1 ***(Formule des accroissements finis)***

Il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x^{'}(a+\theta h, b+\theta k) + kf_y^{'}(a+\theta h, b+\theta k)$$

Application

Soit f la fonction définie par :

$f(x,y) = e^{-y}ln(1+x)$.

Calculer $f(0,2,1,05)$

Corrigé

On a : $f_x^{'}(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{1+x}$ et $f_y^{'}(x,y) = -e^{-y}ln(1+x)$

Et on a : $f(0,2,1,05) = f(0;1) + 0,2f_x^{'}(0,1\theta, 1+0,05\theta) + 0,05f_y^{'}(0,1\theta, 1+0,05\theta)$

Donc : $f(0,2,1,05) = ln(2) + \varepsilon(\theta)$, où $\varepsilon(\theta)$ est l'erreur commise

1.7.1.2 Formules de Taylor

Théorème 1.7.2

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ $(a,b) \in \Omega$, et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment [a,a+h].Alors :

Il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$f(a+h, b+k) =$

$f(a,b) + hf_x^{'}(a,b) + kf_y^{'}(a,b) + \dfrac{1}{2}(h^2 f_x^{''}(a,b) + 2hkf_{xy}^{''}(a,b) + k^2 f_y^{''}(a,b)) + o((h^2+k^2)^2)$

1.7.1.3 Formules de Taylor et notation de Monge.

Si on pose : $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b), r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$

et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, la formule de Taylor prend la forme :

$f(a+h,b+k) = f(a,b) + ph + qk + \dfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o((h^2+k^2)^2)$

où :

$f(a+h,b+k) = f(a,b) + ph + qk + \dfrac{1}{2}Q(h,k) + o((h^2+k^2)^2)$

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par :

1. $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$.
   (a) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2.
   (b) Peut-on déduire le signe de au voisinage de (0,0) ?(pour cela étudier le signe de $f(x,x)$).
   Soit f la fonction définie par :
2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2x - 3y$.
   (a) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2.
   (b) Déduire le signe de au voisinage de $(-1, \dfrac{3}{2}, 0)$

1.7.1.4 Formules de Taylor des fonctions de plusieurs variables

Théorème 1.7.3 ***(Formules de Taylor à l'ordre 2.)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $a \in U$, on a, lorsque $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ tend vers 0 :

$f(a+h) - f(a) =$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} a) h_i + \dfrac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(a)h_i^2 + 2\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)dx_i dx_j) + o(\| h \|^2)$

ou

$f(a+h) - f(a) =$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} a) h_i + \dfrac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(a)h_i^2 + 2\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)dx_i dx_j) + \| h \|^2 \epsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

C'est la formule de Taylor-Young.

Pour la démonstration du théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.7.1

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$\varphi(1) = varphi(0) + \varphi^{'}(0) + \int_0^1 \varphi''(t)(1-t)dt$$

Pour démontrer le lemme il suffit de remarquer que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$$

et intégrer par partie.

1.7.2 Développement limité

Définition 1.7.1
Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ $(a,b) \in \Omega$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme de degré n tel que :

$$f(x,y) = P_n(x,y) + (\| (x,y) \|)^n \epsilon(x,y)$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

1.7.2.1 Développement limité d'ordre un.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ $(a,b) \in \Omega$, et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment [(a,b),(a+h,b+k)].

On peut écrire :

$$f'_x(a+\theta h, b+\theta k) = f'_x(a,b) + \varepsilon_1(h,k)$$
$$hf'_x(a+\theta h, b+\theta k) = f'_y(a,b) + \varepsilon_2(h,k)$$

avec : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0$ et $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0$.

Dans ce cas la formule des accroissements finis prend la forme :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)$$

Mais
$$h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}\left(\frac{\varepsilon_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{\varepsilon_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

D'où : $h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$

Et on alors la formule du développement limité à l'ordre un.

Théorème 1.7.4
La fonction f admet un développement limité à l'ordre un et on a :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

1.7.2.2 Développement limité d'ordre deux

Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ $(a,b) \in \Omega$, et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment [(a,b),(a+h,b+k)]

Théorème 1.7.5 .
La fonction f admet un développement limité à l'ordre un et on a : :

$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f''_x(a,b) + 2hkf''_{xy}(a,b) + k^2 f''_y(a,b)) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h,k)$

C'est la formule du développement limité de f en (a,b) d'ordre deux.

1.8 Optimisation et calcul des extremums

Dans cette partie on cherche à étudier l'existance d'extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^{\ltimes}$ dans $\mathbb{R}$, puis à calculer ces eventuels extrema.

1.8.1 Extrmums libres

1.8.1.1 Définitions et généralités

Définition 1.8.1 ***(Extrema globaux)***
Soit f une fonction de deux variables définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un point de Ω.

1. *On dit que f admet un maximum global au point $(a_1, a_2, ..., a_n)$ si :*
$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \quad f(x) \leq f(a).$$
On écrit : $f(a) = \sup_{(x)\in\Omega} f(x)$
2. *On dit que f admet un minimum global au point $(a_1, a_2, ..., a_n)$ si :*
$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \quad f(x) \geq f(a).$$
On écrit : $f(a) = \inf_{(x)\in\Omega} f(x)$.
3. *On appelle extremum global un maximum global ou un minimum global.*
4. *L'extremum global est strict si l'inégalité est stricte pour $x \neq a$.*

Définition 1.8.2 ***(Extrema locaux)***

1. *On dit que f admet un maximum local au point a s'il existe une boule ouverte $B(a, r)$ de centre de a et dr rayon r tels que :*
$$\forall (x) \in \Omega \bigcap B(a, r), \quad f(x) \leq f(a).$$
On écrit : $f(a) = \sup_{(x)\in\vartheta_a} f(x)$.
2. *On dit que f admet un minimum local au point a s'il existe une boule ouverte $B(a, r)$ de centre de a et dr rayon r tels que :*
$$\forall (x) \in \Omega \bigcap B(a, r), \quad f(x) \geq f(a).$$
On écrit : $f(a) = \inf_{x\in\vartheta_a} f(x)$.
3. *On appelle extremum local un maximum global ou un minimum local.*
4. *L'extremum local est strict si l'inégalité est stricte pour $x \neq a$.*

1.8.1.2 Quelques graphes

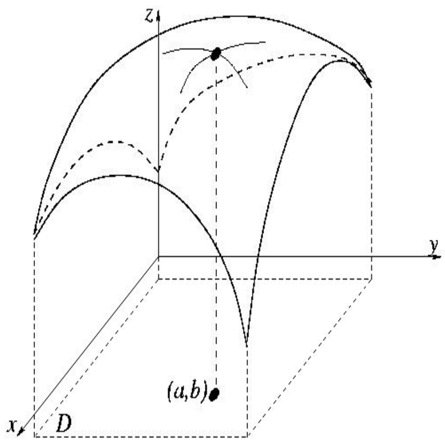


FIG. 1.14 – Maximum

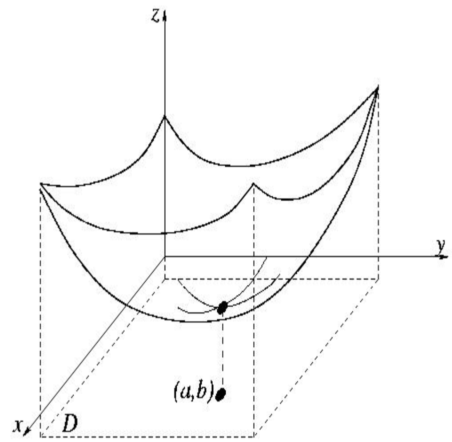


FIG. 1.15 – Minimum

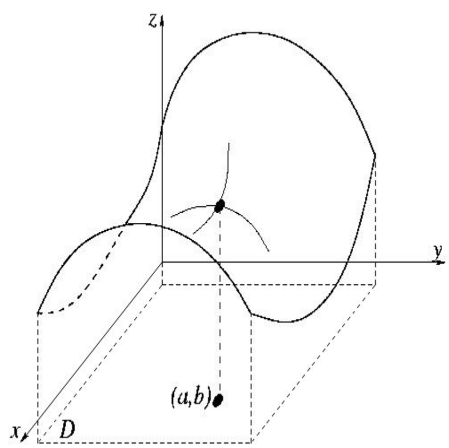


FIG. 1.16 – Point selle

Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, contrairement au cas d'une seule variable, la visualisations des extrema est délicates. Considérons la fonction

$$f(x, y) = 1 + 30x^2 + 20x^3 - 15x^4 - 12x^5 + 8y^2$$

définie sur $\Omega =]-2, 2[\times]-1, 1[$ admet un minimum local et minimum global. Sur le fermé $\overline{\Omega} = [-2, 2]\times[-1, 1]$ la fonction f possède, en plus se deux minnmums sur Ω, six maximums et six autres minimums (situé sur la frontière de Ω, $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$.

Remarque 1.8.1

Généralement les deux problèmes mathématiques montrer qu'il ***existe un objet*** *et* ***trouver un tel objet*** *son assez différents. Le second problème entraine le premier, il est en général plus difficile à résoudre. Par exemple, on sait que :*

Toute fonction continue sur un férmé borné est une application bornée qui atteint ses bornes.

Exemple 1.8.1.1

1. *Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = 3 + 2x + 4y - x^2 - y^2$.*
   On a pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = 8 - (x-1)^2 - (y-1)^2$ et $f(2,1) = 8$ donc f admet un maximum global au point $(2,1)$ et ce maximum est : 8.

2. *La fonction $f(x,y) = x^2y$ n'admet ni maximum ni minimum au voisinage de $(0,0)$.*

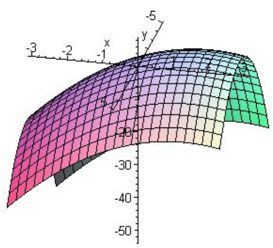


FIG. 1.17 – $f(x,y) = 3 + 2x + 4y - x^2 - y^2$

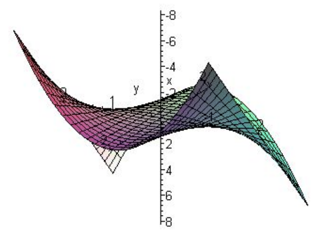


FIG. 1.18 – $f(x,y) = x^2y$

1.8.1.3 Conditions d'extremums

Fonction de deux variables et extremums libres.

Soit f une fonction de deux variables de classe $\in$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et (a,b) un point de Ω.

■ **Conditions nécessaires d'optimalité (du premier ordre)**

Théorème 1.8.1

Si f admet un extremum au point (a,b) et si elle a des dérivées partielles en ce point, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

Remarque 1.8.2

La réciproque de ce théorème set fausse (prendre la fonction $f(x,y) = xy$).

■ **Conditions suffisantes d'optimalité (du second ordre)**

Définition 1.8.3

*On appelle point **stationnaire** ou **critique** le point solution du système :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases}$$

Au voisinage d'un point critique (a,b), la formule de Taylor donne :
$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)+\frac{1}{2}(h^2f''_x(a,b)+2hkf''_{xy}(a,b)+k^2f''_y(a,b))+o((h^2+k^2)^2)$.
Donc :
$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{k^2}{2}(f''_x(a,b)(\frac{h}{k})^2+2f''_{xy}(a,b)(\frac{h}{k})+f''_y(a,b))+o((h^2+k^2)^2)$.
Le signe de $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ est celui de :
$\frac{k^2}{2}(f''_x(a,b)(\frac{h}{k})^2+2f''_{xy}(a,b)(\frac{h}{k})+f''_y(a,b))$ au voisinage de (a,b).

Rappel :(signe d'un trinôme)
Le signe du trinôme : $T(x)=ax^2+bx+c$ dépend du signe de $\Delta=b^2-4ac$:

1. Si $\Delta<0$, T ne s'annule pas et garde un signe constant : celui de a.
2. $\Delta=0$, T s'annule une seule fois et garde un signe constant : celui de a.
3. $\Delta>0$, T s'annule deux fois, donc change signe.

On déduit donc que le signe de :
$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{k^2}{2}(f''_x(a,b)(\frac{h}{k})^2+2f''_{xy}(a,b)(\frac{h}{k})+f''_y(a,b))$ au voisinage de (a,b), dépend du signe de :

$$\Delta=s_0^2-r_0t_0.$$

Où : $r_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ et $t_0=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$

Ces notations sont appelées : **Notation de Monge**
alors :

$$\nabla(a,b)=r_0t_0-s_0^2$$

Définition 1.8.4
On appelle matrice héssienne de f au point (a,b) la matrice :
$H_f(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{pmatrix}$. *Son déterminant, noté $\nabla(a,b)$, est appelé : hessien de f au point (a,b).*
On a :

$$\mathcal{H}_f(a,b)=r_0t_0-s_0^2$$

Théorème 1.8.2

1. *Si $\mathcal{H}_f<0$ alors f n'admet pas d'extremum au point (a,b) (c'est un point **selle**).*
2. *Si $\mathcal{H}_f>0$ et $r_0<0$, alors f admet un maximum local au point (a,b).*
3. *Si $\mathcal{H}_f>0$ et $r_0>0$, alors f admet un minimum local au point (a,b).*
4. *Si $\mathcal{H}_f$, on ne peut pas conclure.*

Application de la trace

Définition 1.8.5
On appelle trace d'une matrice la somme de ses éléments diagonaux dans une base quelconque.

Définition 1.8.6
Un polynôme scindé est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du 1er degré.
$X^2 + 2X + 1 = (X + 1)(X + 1)$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *comme sur* $\mathbb{C}$
$X^2 + X + 1 = (X + j)(X + j^2)$ *est scindé sur* $\mathbb{C}$ *mais pas sur* $\mathbb{R}$. *En particulier, sur* $\mathbb{C}$, *tous les polynômes sont scindés.*

Définition 1.8.7
On appelle polynôme caractéristique de la matrice A, *le déterminant de* $A - \lambda I_n$, *noté :* $P_A(\lambda) = det(A - \lambda.I_n)$.

Théorème 1.8.3 *Si le polynôme caractéristique est scindé, la trace d'une matrice est égale à la somme des valeurs propres.*

Remarque 1.8.3
Dans la pratique, le calcul des valeurs propre est unitil. Car $\lambda.\mu = detH_f(a, b)$ *et* $Tr(H_f(a, b)) = \lambda + \mu$

La matrice $H_f(a, b)$ est symétrique et admet deux valeurs propres réelles λ et μ et on a :

$Tr(H_f(a, b) = r_0 + t_0 = \lambda + \mu$.
Si par exemple $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$, les deux valeurs propres sont de même signe. Comme $r_0 < 0$ on a aussi $t_0 < 0$ sinon on aurait $r_0t_0 - s_0^2 < 0$. Donc $\lambda + \mu < 0$, ce qui entraîne que les deux valeurs propres sont négatives. On a donc un maximum local.

Théorème 1.8.4

1. *Si* $detH_f(a, b) < 0$ *alors* f *n'admet pas d'extremum au point* (a, b) *(c'est un point **selle**).*
2. *Si* $detH_f(a, b) = \lambda.\mu > 0$ *et* $Tr(H_f)(a, b) = \lambda + \mu > 0$, *alors* f *admet un minimum local au point* (a, b).
3. *Si* $detH_f(a, b) = \lambda.\mu > 0$ *et* $Tr(H_f)(a, b) = \lambda + \mu < 0$, *alors* f *admet un maximum local au point* (a, b).
4. *Si* $\nabla(a, b) = 0$, *on ne peut pas conclure.*

Cherchons sur $\mathbb{R}^2$ les extrémums de
$f : (x, y) \to x^3 + y^3$.
On cherche d'abord les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Il n'y a qu'un seul point critique $(0, 0)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 = r$ en $(0, 0)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s$ en $(0, 0)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 = t$ en $(0,0)$

En $(0,0)$, $s^2 - rt = 0$, le théorème ne permet pas de conclure.
Mais $f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^3$ et $f(-x,-y) - f(0,0) = -x^3 - y^3$ expression de signe opposé.
Ainsi $f(x,y) - f(0,0)$ change de signe au voisinage du point critique : $(0,0)$ est un **point col**.

Exercice d'application.

Déterminer les points stationnaires et leurs natures pour la fonction :
$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Fonction de trois variables et extremums libres.

Soit f une fonction de trois variables définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$

On considère le héssien de f défini par :

$$\mathcal{H}_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) & f''_{xz}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{y^2}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b;c) \\ f''_{zx}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) & f''_{z^2}(a,b,c) \end{pmatrix} \text{ et son déterminant}$$

$$det\mathcal{H}_f(a,b,c) = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) & f''_{xz}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{y^2}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b;c) \\ f''_{zx}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) & f''_{z^2}(a,b,c) \end{vmatrix}$$

Théorème 1.8.5

Soit un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, une fonction deux fois continûment différentiable sur Ω et (a,b,c) un point de Ω. On note $\overrightarrow{\nabla} f$ le gradient et $\mathcal{H}f$ la matrice hessienne de f au point (a,b,c).

1. *Si $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{0}$ et si $\mathcal{H}_f$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives, alors f admet un maximum local en (a,b,c).*
2. *Si $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{0}$ et si $\mathcal{H}_f$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors f admet un minimum local en (a,b,c).*
3. *Si $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{0}$ et si $\mathcal{H}_f$ a au moins une valeur propre nulle on ne peut pas conclure.*

Une autre version du théorème.

Soit un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, une fonction deux fois continûment différentiable sur Ω et (a,b,c) un point de Ω. On note $\overrightarrow{\nabla} f$ le gradient de f.

Soient les déterminants :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) & f''_{xz}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{y^2}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b;c) \\ f''_{zx}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) & f''_{z^2}(a,b,c) \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{y^2}(a,b,c) \end{vmatrix}, \text{ et } \Delta_1 = f''_{x^2}(a,b,c)$$

Théorème 1.8.6

1. *Si tous les déterminants Δ_i strictement positifs pour $i = 1,2,3$, alors f admet un minimum local en (a,b,c).*
2. *Si tous les déterminants $(-1)^i\Delta_i$ strictement positifs pour $i = 1,2,3$, alors f admet un maximum local en (a,b,c).*
3. *Si l'un au moins des déterminants est nul on ne peut pas conclure.*

Exemples

1. Voici une fonction de trois variables.

$$f(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4.$$

Voici le gradient et la matrice hessienne de .

$\overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4 \\ 2y - 2 \\ 2z - 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Le gradient s'annule au point$(1, 1, 1)$, qui est un minimum local, puisque les valeurs propres de la matrice hessienne sont toutes strictement positives. Il s'agit en fait d'un minimum global.

2. Voici une fonction de trois variables.

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 2y - 2z + 2.$$

Voici le gradient et la matrice hessienne de .

$\overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4xy \\ -2x^2 + 4y + 2z - 2 \\ 2y + 4z - 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y & -4x & 0 \\ -4x & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Le gradient s'annule en trois points,$(1, 1, 0)$,$(-1, 1, 0)$ et $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Pour les deux premiers points, la matrice hessienne a toutes ses valeurs propres positives : ce sont des minimums. En $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, la matrice hessienne a deux valeurs propres positives, et une négative. Ce n'est donc ni un maximum ni un minimum : nous parlerons encore de "**point selle**", par analogie avec la dimension .

3. Voici une fonction de trois variables.

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 + 2z^2 + 4yz - 2y - 2z + 2.$$

Voici le gradient et la matrice hessienne de .

$\overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4xy \\ -2x^2 + 4x + 4y - 2 \\ 4y + 4z - 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y & -4x & 0 \\ -4x & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$

Le gradient s'annule en tous les points (x, y, z) tels que $x = 0$ et$4y + 4z - 2 = 0$. En chacun de ces points la matrice hessienne a au moins une valeur propre nulle et le théorème ne permet pas de conclure.

On utilise la formule de Taylor pour étudier donc le signe de :

$f(h, k, \frac{1}{2} + l) - f(0, 0, \frac{1}{2})$, en $(0, 0, \frac{1}{2})$ par exemple.

On a au point $(0, 0, \frac{1}{2})$:

$f''_{x^2} = f''_{xz} = f''_{xy} = f''_{yz} = 0$, $f''_{y^2}(0, 0, \frac{1}{2}) = 4$,et $f''_{z^2}(0, 0, \frac{1}{2}) = 4$.

Donc : $f(h, k, \frac{1}{2} + l) - f(0, 0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(4k^2 + 4l^2) \geq 0$; ce qui prouve que f admet un minimum local en $(0, 0, \frac{1}{2})$ et ce minimum est : $f(0, 0, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

Remarque 1.8.4

On sera figilant que les théorèmes s'appliquent à des ensembles ouverts. une fonction définie sur un ensemble non ouvert peut admettre des extemums sans que sa différentielle soit nulle.

Par exemple la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie sur la boule unité fermée $\overline{B}(O(0, 0), 1)$ de centre O et de rayon 1 présente des maximums en tout point du bord de $\overline{B}(O(0, 0), 1)$ alors que sa différentielle n'est nulle qu'au point $O(0, 0)$.

1.8.2 Extremums liés

1.8.2.1 Définitions et généralités

Il s'agit de chercher les extemums d'une fonction $z = f(x_1, ..., x_n)$ dans le cas où les variables sont liés par une relation de la forme : $g(x_1, ..., x_n) = 0$, appelée : **contrainte**. Pour ceci on utilise deux méthodes : Méthode de substitution et Méthode de Lagrange.

1.8.2.2 Méthodes de calcul des extremums

Soit f et g de plusieurs fonctions de plusieurs variables avec : $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Méthode de substitution.

La méthode de substitution consiste à :

1. Définir les différentes variables x_1 , x_2 , x_3 ,... ;
2. Écrire l'objectif en fonction des variables ; Écrire toutes les contraintes ;
3. Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en termes d'une seule ou des variarbles en fonctions du reste (par exemple $x_2 = f_1(x_1)$, $x_3 = f_2(x_1)$, ...) ;
4. Substituer ces expressions dans l'objectif ;
5. Optimiser une fonction d'une seule variable.

Remarque 1.8.5

La fonction à optimiser peut souvent dépendre de plusieurs facteurs. Par exemple, les profits réalisés peuvent dépendre du coût des ressources, du nombre d'employés, du prix de vente. Comment optimiser, sous contrainte, une fonction à plusieurs variables ?

La difficulté réside dans le fait que nous sommes confrontés à plus d'une variable. La résolution d'un tel problème fait appel à la méthode dite de substitution, le résultat étant la réduction du nombre de variables.

Cas de deux variables

Soit à optimiser la fonction : f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Soit (a, b) tel que : $g(a, b) = 0$ et $g'_y(a, b) \neq 0$.

On suppose que g'_x et g'_y sont définies et continues sur un voisinage de (a, b).

Alors d'après le théorème des fonctions implicits il existe une fonction φ d'une seule variable telle que : $\begin{cases} g(x, \varphi(x)) = 0, \\ b = \varphi(a) \\ \varphi'(x) = -\dfrac{g'_x(x, \varphi(x))}{g'_y(x, \varphi(x))} \end{cases}$

On se ramène donc à déterminer les extremums d'une fonction d'une seule variable : $h(x) = f(x, \varphi(x))$.

La condition necssaire s'écrit : $h'(x) = 0$, pour déterminer les points x_0. stationnaires.

La condition suffisante s'écrit : $h''(x_0) \neq 0$:
$\begin{cases} h'(x_0) > 0, & \text{f admet un minimum;} \\ h'(x_0) < 0, & \text{f admet un maximum;} \end{cases}$

Exemple.1.

Déterminer les extremums de la fonction $f(x, y) = 4xy$ sous la contrainte :
$x^2 + y^2 = 0$.

Exemple.2.

Une compagnie produit et distribue de la boisson gazeuse. Les contenants (canettes) ont une forme cylindrique de hauteur h et de rayon r. Afin de réduire les coûts, Kola veut minimiser la surface d'aluminium nécessaire à la construction des contenants. Cependant, ils doivent s'assurer qu'un contenant ait un volume de $128\pi cm^3$. Quels sont les dimensions du contenant qui réalisent l'objectif et satisfait la contrainte ?

Solution.2.

1. Définir les différentes variables x_1 , x_2 , x_3 ,... ;
   r : rayon du cylindre $(r > 0)$
   h : hauteur du cylindre $(h > 0)$

2. Écrire l'objectif en fonction des variables ; Objectif : minimiser la surface du contenant :

$$MinS(r, h) = 2\pi.r^2 + 2\pi.r.h$$

3. Écrire toutes les contraintes
   $volume = 128\pi$ et $volume = \pi.r^2 h$.

4. Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en termes d'une seule (par exemple $x_2 = f_1(x_1)$, $x_3 = f_2(x_1)$,...) :
   De l'expression : $\pi.r^2 h = 128\pi$, on isole h :

$$h = \frac{128}{r^2}.$$

5. Substituer ces expressions dans l'objectif ;

   $S(r, h) = 2\pi.r^2 + 2\pi.r.h$

   On pose : $\varphi(r) = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.(\frac{128}{r^2})$.

   Donc : $\varphi(r) = 2.\pi.r^2 + \pi.(\frac{256}{r})$.

6. Optimiser.

On a : $\varphi'(r) = (2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.(\frac{256}{r}))'$.
Un point stationnaire est obtenu lorsque :$S'(r) = 0$ où
$4.\pi.r - \pi(\frac{256}{r^2}) = 0 \Rightarrow r = 4$.
Il faut s'assurer qu'on retrouve bien un minimum en ce point :
Or $\varphi''(r) = (4.\pi.r - \pi(\frac{256}{r^2}))' = 4.\pi + \pi(\frac{512}{r^3}))$.
Pour $r > 0$, la dérivée seconde est toujours positive. La fonction S est donc toujours convexe, ce qui implique que le point stationnaire $r = 4$ constitue un minimum absolu. La valeur correspondante de h est obtenu de la relation :

$$h = \frac{128}{r^2} = 8$$

La surface est minimisée lorsque $r = 4$ et $h = 8$.

Remarque 1.8.6
La résolution par substitution demeure un moyen très efficace, même dans les problèmes ayant plus de deux variables.

Cas de deux variables et deux contraintes
Etudier les extremums de la foction f définie par ; $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy + z + 4$ sous les contraintes : $\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + z = 5 \end{cases}$

Exemple.3.
Avec exactement $2700cm^2$ de carton, nous désirons construire une boîte (largeur x, profondeur y, hauteur z) pouvant contenir un volume V. Nous exigeons que la largeur de la boîte soit le double de sa profondeur. Nous aimerions maximiser le volume que peut contenir cette boîte. Quelles valeurs de x, y, z réalisent notre objectif.

Solution.3.

1. Définir les différentes variables x_1 , x_2 , x_3 ,... ;

   x : largeur de la boîte ($x > 0$)

   y : profondeur de la boîte ($y > 0$)

   z : hauteur de la boîte ($z > 0$) "

2. Écrire l'objectif en fonction des variables ;

   Objectif : maximiser le volume de la boîte $Maxv(x, y, z) = xyz$

3. Écrire toutes les contraintes ;

   1. Surface du matériel disponible $2700m^2$

   $2xy + 2yz + 2xz = 270$ (1)

   2. Dimensions exigées : $x = 2y$

4. Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en fonction d'une seule.

   On a $x = 2y$ La variable x est exprimée en fonction de y dans la contrainte 2 : $x = 2y$
   En substituant cette expression dans la contrainte (1), nous pourrons aussi exprimer z en fonction de y :
   $2xy + 2yz + 2zx = 2700 \Leftrightarrow 2(2y)y + 2yz + 2z(2y) = 2700 \Leftrightarrow 4y2 + 6zy = 2700$. Donc $z = \dfrac{2700 - 4y^2}{6y}$

5. Substituer ces expressions dans l'objectif d'obtenir une onction d'une seule variable :

$$\varphi(y) = 900y - \frac{4}{3}y^3$$

6. Optimiser.

Cherchons les points stationnaires :
$\varphi'(y) = (900y - \frac{4}{3}y^3)' = 0 \Leftrightarrow 900 - 4y^2 = 0$
$\Rightarrow y = 15$ ou $y = -15$.
Or, seule la valeur $y = 15$ est acceptable puisque les dimensions de la boîte doivent être positives. Il faut s'assurer qu'on retrouve bien un maximum en ce point :
$\varphi''(y) = (900y - \frac{4}{3}y^3)'' = -8y$
Sur le domaine $y > 0$, la dérivée seconde est toujours négative.
La fonction V est donc toujours concave, ce qui implique que le point stationnaire $y = 15$ constitue un maximum absolu.
Les valeurs de x et de z correspondantes sont $x = 2y = 2(15) = 30$
Le volume de la boîte est donc maximisé lorsque ses dimensions sont $x = 30$, $y = 15$, $z = 20$.

Méthode de Lagrange.

La méthode de Lagrange est une méthode permettant de résoudre les problèmes d'optimisation sous contrainte. Supposons que le problème soit de trouver les extremums d'une fonction de plusieurs variables f, tout en imposant des contraintes sur les valeurs de celle-ci, définie par : $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Cette méthode consiste à introduire une inconnue scalaire supplémentaire, appelée multiplicateur de Lagrange, par contrainte. Ensuite, on forme une combinaison linéaire de la fonction et des contraintes, les coefficients des contraintes étant les multiplicateurs de Lagrange. Le problème passe ainsi d'un problème d'optimisation avec contrainte à un problème non contraint, qui peut être résolu par une méthode adaptée.

Techniques de calcul des extrémums sous contrainte en dimension 2.

Soit à optimiser la fonction de deux variables f sous la contrainte $g(x, y) = 0$, où f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour résoudre le problème, on forme la fonction auxiliaire appelée : Lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{2}$$

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
1- On détermine les points stationnaires (x_0, y_0) et lmultiplicateur auxiliaire λ_0 de L :

$$L_x^{'}(x,y,\lambda) = f_x^{'}(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \tag{3}$$

$$L_y^{\prime}(x,y,\lambda) = f_y^{\prime}(x,y) + \lambda g_y^{\prime}(x,y) = 0 = 0 \tag{4}$$

$$L_\lambda^{\prime}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \tag{5}$$

2- On détrmine le hessien de L ,(x_0, y_0, λ_0).

$$det\mathcal{H}_L(x_0,y_0,\lambda_0) = \begin{vmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & f''_{y^2} & L''_{y\lambda} \\ L''_{x\lambda} & L''_{y\lambda y} & L''_{\lambda^2} \end{vmatrix}$$

Théorème 1.8.7

1. *Si* $det\mathcal{H}_L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$, f *admet un maximum.*
2. *Si* $det\mathcal{H}_L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$, f *admet un minimum.*
3. *Si* $det\mathcal{H}_L(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$, *on ne peut pas conclure.*

Exemple. Etudier les extremums de la fonction f sous la contrainte dans le cas suivant : $f(x,y) = x^2y^3$ et $g(x,y) = x + y - 5 = 0$.

1.8.3 Etudes d'extremums sur un fermé

Dans cette section puisque'on s'interesse aux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ un ensemble fermé E sera défini à partir de fonctions continues de la façon suivante :

$$E = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq 0\}$$

ou

$$E = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq 0\}$$

,

un ouvert O sera défini par :

$$O = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad f(x) \leq 0\}$$

ou

$$O = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad f(x) \geq 0\}$$

.

Théorème 1.8.8 *Soit* $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continue avec* K *un compact, alors* $f\big(K\big)$ *est un compact. En particulier fonction atteint ses bornes sur* K.